

Sterctenbouwing (1594) als context voor sinusregel en cosinusregel

Henk Hietbrink

Wiskundigen hebben zich in de zestiende en zeventiende eeuw gestort op de vestingbouw. Zij waren betrokken bij het onderwijs en het afnemen van examens bij militaire ingenieurs. Ieder van hen ontwikkelde een eigen aanpak met eigen regels. Baanbrekend in 1594 was het boek *Sterctenbouwing* van Simon Stevin, maar ook Adriaan Metius en Pieter van Schooten stonden aan de top ([1]). Voor leerlingen van nu vinden we er een grote verscheidenheid aan opdrachten met zinvolle toepassingen van de sinusregel en de cosinusregel. De uitwerkingen staan aan het einde van dit artikel.

Simon Stevin: *Sterctenbouwing*

Aanleiding tot dit artikel is de herdenking van Simon Stevins dood (1548–1620). Hij publiceerde zijn boek *Sterctenbouwing* in 1594. Hij was een van de eersten die in het Nederlands schreef over vestingbouw. Zijn voorstel is gebaseerd op het Italiaanse systeem, met kloeke bolwerken opgetrokken uit zware, stenen muren. De citadel en Spaanse omwalling van Antwerpen waren ook een goed voorbeeld, maar die zijn afgebroken ([2]).

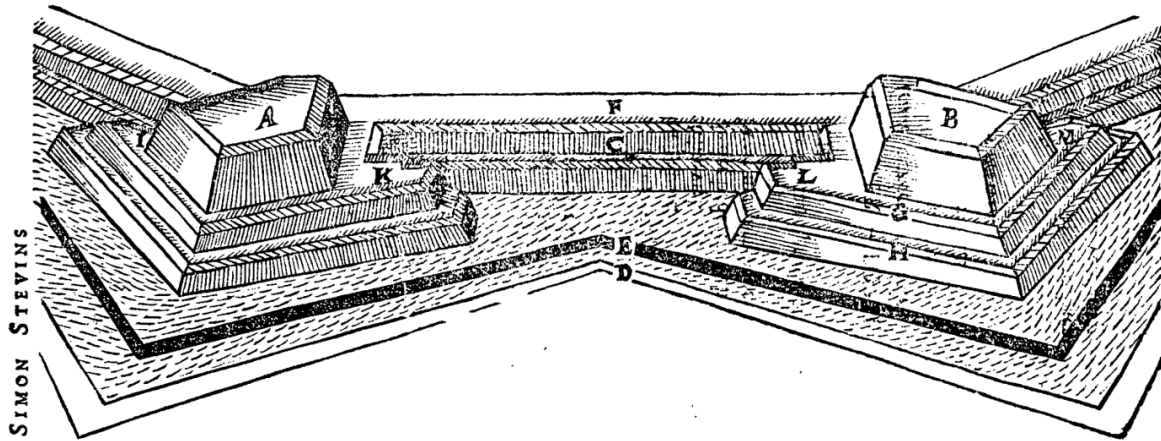


Figuur 1: Pauwels van Overbeke, 1568, Antwerpen binnen de Spaanse omwalling met Citadel

Simon Stevin adviseerde Prins Maurits over het lesprogramma van de Duytsche Mathematique. Deze opleiding ging in 1600 in Leiden van start omdat er behoefte was aan goed opgeleide militaire ingenieurs en landmeters. Vestingbouw was een serieus lesdoel. Stevin stelde voor dat houten schaalmodellen gebruikt zouden worden om de rechte baan van een kogel langs een bolwerk (strijklijn) met touw zichtbaar te maken. Tussen 1610 en 1679 werden de lessen verzorgd door drie leden van de familie Van Schooten. Een van de drie opdrachten in dit artikel is gebaseerd op hun

handschriften. Daarnaast waren er in de Republiek een groot aantal privé-docenten die lesgaven in wiskunde, perspectieftekenen (architectuur) en vestingbouw. Ook kon je vestingbouw in de praktijk leren door je aan te melden bij het Staatse of Spaanse leger. Ieder jaar was er wel ergens een belegering. Bouwkunde als studierichting bestond nog niet. De theorie leerde je van wiskundigen.

In figuur 2 zien we een tekening die Stevin opnam in zijn boek. Deze tekening komt terug in de eerste opdracht. Stevin was heel uitgebreid in zijn beschrijvingen. Van ieder onderdeel vermeldde hij de lengte, hoogte en breedte. Wie wil, kan zijn ontwerp nabouwen, bijvoorbeeld met een 3D-printer ([3]).



Figuur 2: Simon Stevin, Sterctenbouwing: vooraanzicht van een courtine met twee bolwerken

Geschiedenis van de vestingbouw

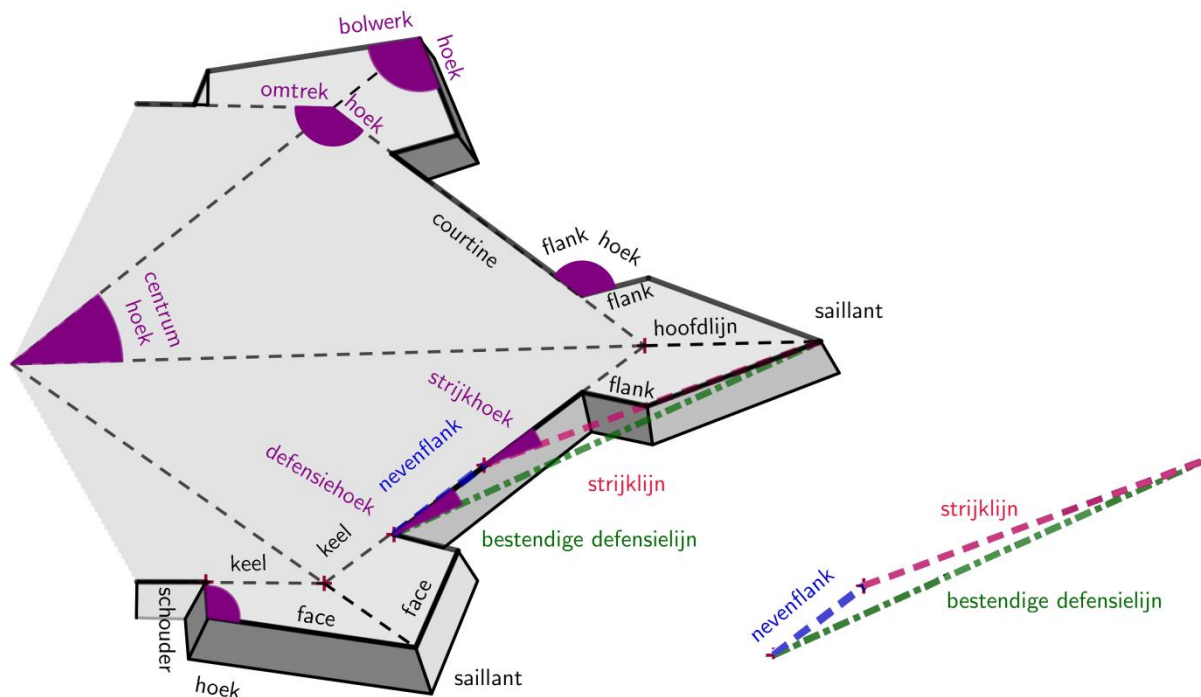
Stevin paste in zijn ontwerp de principes toe van het Italiaanse vestingstelsel. Kenmerkend zijn de zware stenen muren rondom het bolwerk (H) en de courtines (C) en de stenen gebouwen waarin de kanonnen stonden opgesteld (kazematten achter K en L).

Dat systeem vond na 1600 in het vlakke Nederland geen navolging. Vestingen werden gebouwd met lage aarden wallen en aarden bolwerken zonder stenen muren en zonder kazematten. Om de vesting kwamen wijde, ondiepe, natte grachten van slechts enkele meters diep. Een dergelijke vesting was aanmerkelijk sneller en goedkoper te realiseren dan die in steen uitgevoerde bolwerken naar Italiaans ontwerp. Zo ontstond het oud-Nederlandse vestingstelsel. In beide stelsels stond bovenop de courtines (F) en de bolwerken (G) een metersdikke borstwering die inslaande kanonskogels kon opvangen.

Hoe groot het verschil is tussen beide stelsels, blijkt wanneer de hoogtes die Stevin op bladzijde 23 geeft, omgerekend worden van voet naar meter. Zijn courtine (F) en bolwerk (L) zijn 40 voet hoog; dat is meer dan 12 meter hoog. Op de bolwerken bedacht Stevin voor de kanonnen een extra verhoging (A) van nog eens 40 voet bovenop die 40 voet van het bolwerk. Zijn gracht (E) is 55 voet diep; dat is meer dan 17 meter diep. Deze hoogte en diepte staan in groot contrast met de hoogte van 5 tot 7 meter en de diepte van 2 tot 4 meter die auteurs na Stevin beschrijven.

Terminologie

De basisvorm van een vesting met bolwerken is getekend in figuur 3. Om een stad wordt als omtrek een veelhoekige wal aangelegd, bij voorkeur een regelmatige veelhoek. Op de hoeken van die veelhoek komen de bolwerken. De punt van het bolwerk heet saillant. De wal tussen twee bolwerken heet courtine. De zijanten van een bolwerk heten flanken en de voorzijden heten faces. De keel is de grens tussen bolwerk en veelhoek. Militairen tekenen één rechte lijn. Het bolwerk is dan een vijfhoek. Wiskundigen tekenen de keel in het verlengde van de courtine. Een keel bestaat dan uit twee delen die met een knik samenkomen in het keelpunt. De zijde van de veelhoek wordt zo benadrukt en dat vereenvoudigt het rekenwerk aanzienlijk. De hoek tussen de zijden heet de omtrekshoek.



Figuur 3: terminologie verdedigingswerken

De hoofddlijn is de lijn van de saillant naar het keelpunt. De defensielijn is de lijn vanuit de flankhoek, het hoekpunt van de courtine met de flank, tot aan de saillant, de punt van het bolwerk. Die lijn moet korter zijn dan de reikwijdte van een geweer, namelijk 60 roede oftewel 720 voet. Omgerekend is dat ongeveer 230 meter. De lijn vanuit de saillant naar het punt op de courtine waar die door de denkbeeldig doorgetrokken face wordt geraakt is de strijkljn (ook wel strijkende defensielijn genoemd). De nevenflank is het deel van de courtine tussen de defensiehoeck en de strijkhoeck ([4]).

Aanval en verdediging

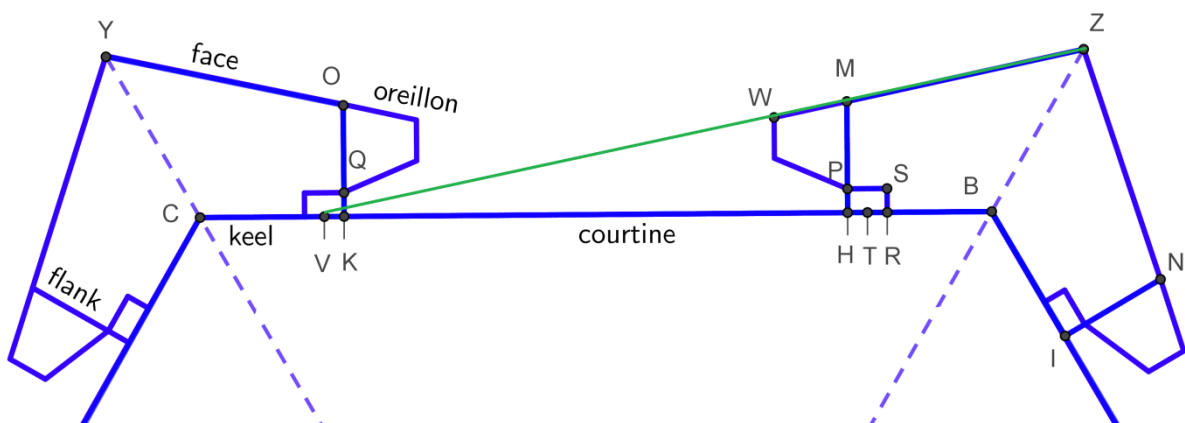
Door die uitstekende bolwerken is een aanvaller nergens veilig voor het vuur van de verdediger. Wanneer een aanvaller de courtine (wal) aanvalt, dan ligt de verdediger daar onder vuur, maar vanuit de flanken kan de verdediger veilig schieten op de aanvallers. Belangrijk is dat de flank breed genoeg is om er voldoende geschut neer te zetten. Wanneer een aanvaller zijn aanval richt op een face, dan kan de verdediger veilig vanuit de flank van het naastgelegen bolwerk langs de face

schieten op de aanvallers. Wanneer de hoek van het bolwerk scherp genoeg is, dan kan ook vanaf nevenflank (het deel van de courtine tussen defensiehoek en strijkhoeke) langs de face geschoten worden.

Een ingenieur moest in zijn ontwerp een balans zien te vinden. Hoe minder scherp de bolwerkhoek, hoe steviger het bolwerk. Wanneer in figuur 3 de bolwerkhoek een beetje groter wordt en de strijklijn de defensielijn nadert, wordt de flank iets langer, maar de nevenflank korter. Wanneer de bolwerkhoek nog groter wordt, dan vallen de strijklijn en de defensielijn samen. En dus worden de flank en de hoofdlijn korter en de oppervlakte van het bolwerk kleiner, dus hoe minder vuurkracht ingezet kon worden op de flank om de face te verdedigen. Kortom, hoe kleiner de strijkhoeke, hoe kleiner de nevenflank, dus hoe minder vuurkracht ingezet kon worden op de courtine om de face te verdedigen. Een goed ontwerp was dus een compromis tussen sterkte, omvang en kosten. Een animatie om dit inzichtelijk te maken vindt de lezer op ([5]).

Opdracht 1: Simon Stevin

Hieronder staat een opdracht bij het zeshoekige ontwerp van Simon Stevin. Hij vermeldt in de *Sterctenbouwing* wel de lengte van alle zijden, maar niet de grootte van de hoeken. Zijn opvolgers voerden intensieve discussies over de grootte van die hoeken. De bolwerkhoek moest niet te scherp zijn, of liever juist recht, maar beslist niet stomp. Opdracht is om bij Stevins ontwerp de grootte van de bolwerkhoek $M\hat{Z}N$ en de lengte van de defensielijn $[VZ]$ uit te rekenen. Gerekend wordt in voet. Duizend voet is ongeveer 314 meter. De tekening hieronder is op schaal, maar alleen de borstwering *HPSR* op de flank is voor de leesbaarheid vergroot weergegeven. In de opdracht zijn de punten V en T halverwege de borstwering van belang. In de wiskunde is een lijn zonder breedte, maar in de vestingbouw moet men rekening houden met de breedte van de verschillende onderdelen. Bij Stevin vertrekt de defensielijn in de hoek van courtine $[HK]$ en flank $[KO]$ in het punt halverwege de breedte van de borstwering in het punt V .



Figuur 4: zeshoek van Simon Stevin

Stevin geeft de afmetingen in voet:

- de straal van de zeshoek (en dus ook de zijde $[BC]$) is 1000 voet
- de lengte van de linkerkeel $[CK]$ en die van de rechterkeel $[BH]$ is telkens 180 voet

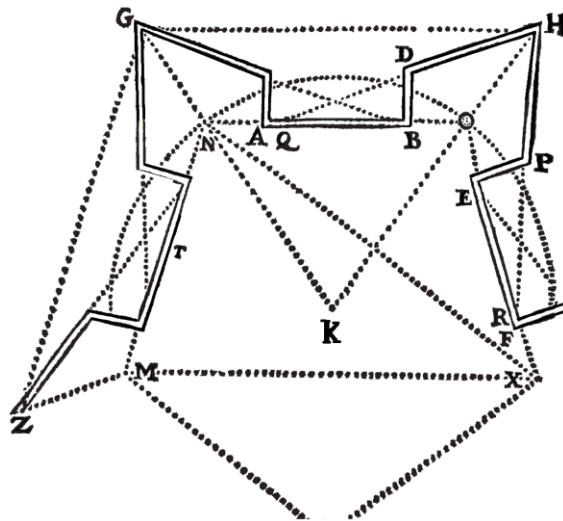
- de lengte van de courtine $[HK]$ is 640 voet
- de flank staat loodrecht op de courtine
- de lengte van de linkerflank $[KO]$ is 140 en van de rechterflank $[HM]$ is 140 voet
- de breedte van de borstwering $[HR]$ is 20 voet
- de halve breedte van de linkerborstwering $[KV]$ is 10 en van de rechter $[HT]$ is 10 voet
- de strijklijn $[VZ]$ valt samen met de defensielijn $[TY]$.

Na 1600 vond men dat een bolwerk niet te spits maar zeker niet stomp mocht zijn. Ook vond men dat de defensielijn niet langer dan 720 voet mocht zijn. Opdracht is om met berekeningen vast te stellen dat dit ontwerp van Stevin niet aan deze twee voorwaarden voldoet:

- de lengte van de defensielijn $[VZ]$ is kleiner dan 720 voet
- de grootte van de bolwerkhoeck $M\hat{Z}N$ is kleiner dan 90° .

Opdracht 2: Adriaan Metius

Adriaan Metius (1571–1635) is de zoon van Adriaen Anthonisz (1541–1620). De laatste was vestingbouwkundige en burgemeester van Alkmaar. Zijn vestingwerken weerstonden de Spaanse aanval op Alkmaar van 1573. Hij werkte volgens de principes van het oud-Nederlandse vestingstelsel. Zijn wal was met 6 meter veel minder hoog dan die van Stevin en de bolwerkhoeck was niet stomp. Adriaan Metius werd professor in Franeker en heeft in zijn boeken de ideeën van zijn vader verwerkt. Volgens hem moest de bolwerkhoeck altijd twee derde van de omtrekshoeck zijn, maar nooit meer dan 90° . Dit gold zowel voor de vijfhoek als de zeshoek en de zevenhoek. Omdat vanaf de achthoek de omtrekshoeck minstens 135° is, is vanaf de achthoek de bolwerkhoeck recht. Volgens zijn vader moest de keel $[AN]$ altijd twee negende deel van de zijde $[NO]$ zijn en de flank $[BD]$ een zesde deel van de zijde $[NO]$ zijn. Onderstaande figuur staat in Metius' boek *Fortificatie ofte stercken-bouwingh* uit 1626.



Figuur 5: vijfhoek van Adriaan Metius

Metius geeft voor de vijfhoek de volgende informatie. Gerekend wordt in voet. Honderd voet zijn ongeveer 31,4 meter.

- de bolwerkhoeck DHP is twee derde van de omtrekshoeck

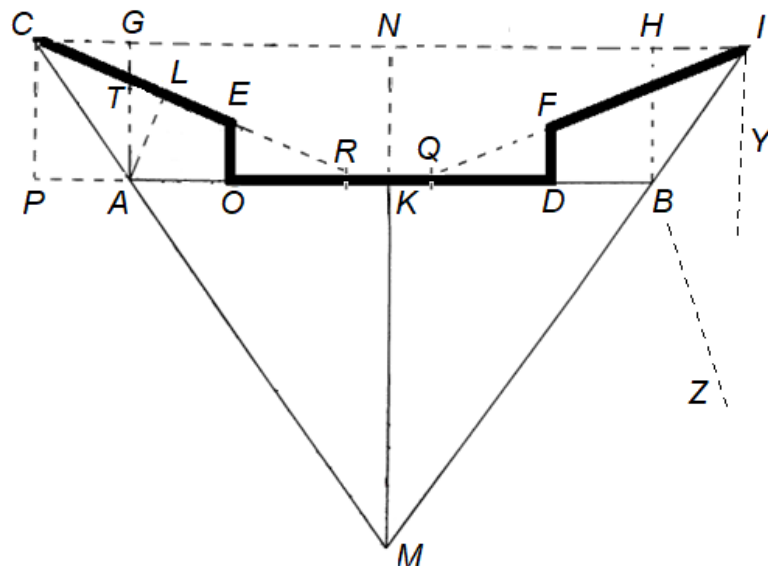
- de lengte van de zijde $[NO]$ is 540 voet (oftewel 45 roede, omgerekend 170 meter)
- de lengte van de keel $[AN]$ is twee negende deel van de zijde: $|AN| = \frac{2}{9}|NO|$
- de lengte van de flank $[BD]$ is een zesde deel van de zijde: $|BD| = \frac{1}{6}|NO|$
- de flank $[BD]$ staat loodrecht op de courtine $[AB]$

Gevraagd wordt om te berekenen:

- de lengte van face $[DH]$
- de lengte van de defensielijn $[AH]$.

Opdracht 3: Pieter van Schooten

Pieter van Schooten was van 1660 tot 1679 de derde uit de familie van Schooten die les gaf aan de Duytsche Mathematique, de opleiding tot ingenieur en landmeter, waarvoor Stevin het curriculum schreef. De tekening van figuur 6 is ontleend aan het Leidse handschrift: *BPL 1993*. Pieter gebruikte een andere formule voor de grootte van de bolwerkhoek dan Metius. Ook hanteerde hij andere verhoudingen. Bij Pieter is de bolwerkhoek altijd 30° meer dan een derde van de omtrekshoek. De hoofdlijn $|AC|$ is volgens hem een derde van de zijde $|AB|$ en de keel $|AO|$ een vijfde van de zijde $|AB|$.



Figuur 6: vijfhoek van Pieter van Schooten

Van Schooten geeft voor de vijfhoek de volgende informatie. Gerekend wordt in Rijnlandse roede. Een roede is ongeveer 3,767 meter.

- de bolwerkhoek is 30° meer dan een derde van de omtrekshoek
- de afstand tussen de bolwerkspunten $|CI|$ is 60 roede
- de lengte van de keel is een vijfde deel van de zijde: $|AO| = |BD| = \frac{1}{5}|AB|$
- de lengte van de hoofdlijn is een derde deel van de zijde: $|AC| = |BI| = \frac{1}{3}|AB|$
- de flank staat loodrecht op de courtine.

Gevraagd wordt om de afmetingen van deze vesting te berekenen:

- de lengte van face $[CE]$
- de lengte van flank $[DF]$

- de lengte van courtine $[DO]$
- de lengte van de nevenflank $[DR]$.

Wiskundig gezien is dit een fraaie opdracht omdat je een vergelijking moet opstellen voor de lengte van de afstand tussen de bolwerkspunten. Om het plezier niet te bederven, staat er een hint kort voor de uitwerkingen achteraan dit artikel. Extra uitdaging is om net als Pieter geen gebruik te maken van de sinusregel, maar wel van die slimme hulplijn AL .

Uitwerking Simon Stevin

De lengte van de defensielijn $[VZ]$ en de grootte van de bolwerkhoe $M\hat{Z}N$ kunnen op veel manieren uitgerekend worden. Een aanpak is om in de zeshoek eerst alle relevante hoeken uit te rekenen, waaronder de defensiehoek in driehoek $\Delta H\hat{M}V$. Vervolgens kan in driehoek ΔBVZ de hoek $\hat{Z}$, de helft van de bolwerkhoe, uitgerekend worden. Doorrekenen met de sinusregel geeft tot slot de lengte van de defensielijn.

In rechthoekige driehoek $\Delta H\hat{M}V$ is $|HM| = 140$ en $|HV| = |BC| - |BH| - |CK| + |KV| = 1000 - 180 - 180 + 10 = 650$. Daarom is $\tan H\hat{V}Z = \frac{|HM|}{|HV|} = \frac{140}{650}$. De defensiehoek $H\hat{V}Z$ is dus $12,15^\circ$.

De vesting is een zeshoek. Noem punt A het midden van die zeshoek. In gelijkbenige driehoek ΔABC is $B\hat{A}C = \frac{1}{6} \cdot 360^\circ = 60^\circ$ en dus $C\hat{B}Z = 120^\circ$. Vanwege de hoekensom is $B\hat{Z}V = 180^\circ - 120^\circ - 12,15^\circ = 47,85^\circ$. De bolwerkhoe is daarvan het dubbele: $M\hat{Z}N = 95,7^\circ$. Conclusie is dat de bolwerkhoe stomp is.

Toepassen van de sinusregel in driehoek ΔBVZ geeft de lengte van de hoofdlijn $[BZ]$ en de lengte van de defensielijn $[VZ]$. Uit $\frac{|VZ|}{\sin \hat{B}} = \frac{|BZ|}{\sin \hat{V}} = \frac{|BV|}{\sin \hat{Z}}$ met $|BV| = |HV| + |BH| = 650 + 180 = 830$ volgt dat de hoofdlijn $|BZ| = 235,74$ en dat de defensielijn $|VZ| = 969,6$. Conclusie is dat de defensielijn veel langer is dan de dracht van een musket (geweer) die gesteld werd op 720 voet.

Uitwerking Adriaan Metius

Gevraagd worden de lengte van face $[DH]$ en de lengte van defensielijn $[AH]$. Gegeven is dat $|NO| = 540$. Conform de gegeven verhoudingen is de lengte van de keel $|AN| = \frac{2}{9} \cdot 540 = 120$ en is de lengte van de flank $|BD| = \frac{1}{6} \cdot 540 = 90$. Relevante hoeken zijn middelpuntshoe $N\hat{R}O = 72^\circ$, omtrekshoe $M\hat{N}O = 108^\circ$ en bolwerkhoe $D\hat{H}P = \frac{2}{3} \cdot 180^\circ = 72^\circ$. De strijkhoe volgt uit de hoekensom: $H\hat{Q}O = 180^\circ - 108^\circ - 36^\circ = 18^\circ$.

De lengte van face $[DH]$ vinden we in een aantal stappen. Belangrijk is om niet tussentijds af te ronden, maar met extra decimalen door te rekenen. In rechthoekige driehoek ΔBQD is $\frac{|BD|}{|BQ|} = \tan H\hat{Q}O$ en dus $|BQ| = 276,99$. De lengte van de nevenflank is $|AQ| = |AB| - |BQ| = 23,00$. Verder is $\frac{|BD|}{|DQ|} = \sin H\hat{Q}O$ dus $|DQ| = 291,25$. Voor de berekening van de lengte van face $[DH]$

passen we de sinusregel toe in driehoek ΔHOQ , namelijk $\frac{|OQ|}{\sin \hat{H}} = \frac{|HO|}{\sin \hat{Q}} = \frac{|HQ|}{\sin \hat{O}}$ met $|OQ| = |BQ| + |BO| = 396,99$. Zo vinden we de lengte van de strijklijn $|HQ| = 546,41$. De lengte van de face is $|DH| = |HQ| - |DQ| = 255,17$ voet (doorerekend is met zeven decimalen, opgeschreven zijn de getallen afgerond op twee decimalen). De lengte van de hoofdlijn is $|HO| = 208,71$ voet.

Voor de berekening van de defensielijn $[AH]$ passen we in driehoek ΔAHO de cosinusregel toe, waarbij $|HO| = 208,71$, $|AO| = |AB| + |BO| = 420,00$ en $\hat{A\hat{O}H} = 126^\circ$. De lengte van de defensielijn is dan $|AH| = 568,34$ voet.

Hint bij Pieter van Schooten

De afstand tussen de bolwerkspunten $|CI|$ bestaat uit drie delen, namelijk. $|CI| = |CG| + |GH| + |HI|$. Samen zijn ze 60 roede. Noem zijde $|AC|$ de onbekende x , maak een vergelijking en los die op!

Uitwerking Pieter van Schooten

Gevraagd wordt naar de lengte van face $[CE]$, flank $[EO]$, courtine $[DO]$ en nevenflank $[DR]$. In de vijfhoek is de middelpuntshoek $\hat{AMB} = \frac{1}{5} \cdot 360^\circ = 72^\circ$, daarom is de omtrekshoek $\hat{DBZ} = 108^\circ$ en de bolwerkhoek is $\hat{F\hat{I}Y} = \frac{1}{3} \cdot 108^\circ + 30^\circ = 66^\circ$. De strijkhoeven vinden we in driehoek ΔARC . De helft van de bolwerkhoek is $\hat{ACR} = \frac{1}{2} \cdot 66^\circ = 33^\circ$, de helft van de omtrekshoek is $\hat{M\hat{A}B} = \frac{1}{2} \cdot 108^\circ = 54^\circ$, dus $\hat{CAR} = 126^\circ$ en daarom is de strijkhoeven $\hat{ARC} = 21^\circ$.

De afstand tussen de bolwerkspunten is gegeven: $|CI| = |CG| + |GH| + |HI| = 60$. Stel $|AB| = x$. Dan is $|AC| = \frac{1}{3}x$ en $|GH| = |AB|$ en $|CG| = \frac{1}{3}x \cos 54^\circ$. Dit invullen geeft de vergelijking $\frac{1}{3}x \cos 54^\circ + x + \frac{1}{3}x \cos 54^\circ = 60$. Oplossing is $x = 43,11$. Zodoende is de lengte van de zijde $|AB| = x = 43,11$, de lengte van de hoofdlijn is $|AC| = \frac{1}{3}x = 14,37$, de lengte van de keel is $|AO| = \frac{1}{5}x = 8,62$ en de lengte van de courtine is $|DO| = \frac{3}{5}x = 25,86$. De sinusregel toepassen in driehoek ΔARC geeft de lengte van de strijklijn $|CR| = 32,44$ en de afstand $|AR| = 21,84$. Verder is $|OR| = |AR| - |AO| = 13,22$. Doorrekenen geeft de lengte van de gevraagde nevenflank, namelijk $|DR| = |DO| - |OR| = 12,65$. De lengte van flank $[EO]$ vinden we in driehoek ΔEOR waar de strijkhoeven $\hat{ERO} = 21^\circ$ is en aanliggende zijde $|OR| = 13,22$ is. Zodoende is flank $|EO| = 5,07$ en $|ER| = 14,16$. Tot slot is de lengte van face $|CE| = |CR| - |ER| = 18,28$.

Er zijn ook andere manieren om de opdracht tot een goed einde te brengen. Zonder sinusregel kan het door eerst de lengte te berekenen van de zijden van de driehoeken ΔACP en ΔCPR . Wie hulplijn AL uit de tekening benut, ontdekt dat de driehoeken ΔCGT , ΔALT , ΔART en ΔRLA alle vier rechthoekig zijn en de strijkhoeven gemeenschappelijk hebben. Daarom zijn ze gelijkvormig en kan de lengte van $[AR]$ gevonden worden.

Noten

- [1] Op mijn website <http://www.fransvanschooten.nl/Stevin.htm> staan verwijzingen naar de originele teksten en aanvullende informatie over deze drie opdrachten en extra opdrachten.

- [2] Prof. Dr. Piet Lombaerde heeft mij op het spoor gezet van deze wiskunde en bijgedragen aan veel publicaties over vestingbouw in Vlaanderen.
- [3] Op mijn website staat een STL bestand van het Stevin ontwerp voor een 3D printer.
- [4] Meer informatie over de terminologie staat op de website van de stichting Menno van Coehoorn .De stichting Menno van Coehoorn ijvert voor het behoud van historische vestingwerken. Op hun website <https://coehoorn.nl/terminologie/> staat een begrippenlijst met illustraties.
- [5] Op mijn website <https://www.geogebra.org/m/xeqjdkpj#chapter/524909> staan animaties en uitwerkingen in GeoGebra.

Literatuur

Op de website <http://www.fransvanschooten.nl/Stevin.htm> staat een meer uitgebreide literatuurlijst met verwijzingen naar vindplaatsen. Er staat ook een link naar mijn video met een historische inleiding.

Lombaerde, P., *Antwerpen versterkt. De Spaans omwalling vanaf haar bouw in 1542 tot haar afbraak in 1870*, Brussel, University Press Antwerp, 2009.

Lombaerde, P. *Bastions zonder Grenzen*, Gorredijk, Sterck & De Vreese, 2020

Metius, A., *Fortificatie ofte stercken-bouwinghe*, Franeker, Ulderick Balck, 1626

Schooten, P. van, *Handschrift BPL 1993*, Universiteitsbibliotheek, Leiden

Stevin S, *Sterctenbouwing*, Leiden, Francois van Ravelenghien, 1594

Over de auteur

Henk Hietbrink gaf vorig schooljaar wiskunde op het Hermann Wesselink College in Amstelveen.

Momenteel doet hij onderzoek naar de wiskunde van Simon Stevin, schrijft daarover op zijn website www.fransvanschooten.nl en verzorgt workshops over zonnewijzers en muqarnas. E-mail: hietbrink.h@planet.nl.