

De Hoek van Zonsopkomst

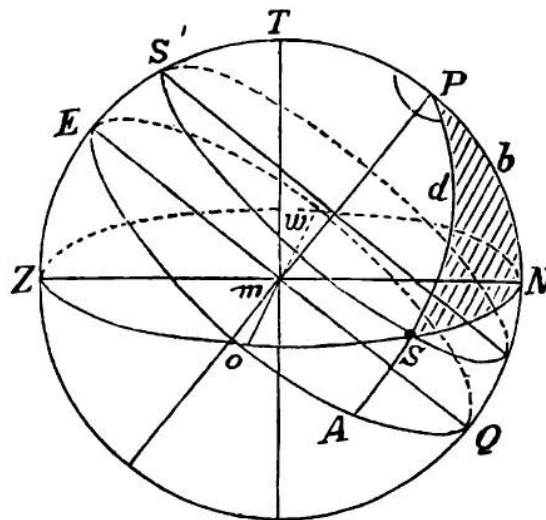
In Zon&Tijd 2024-3 stond een puzzelvraag: Job van de Groep vroeg om een formule voor de hoek waarmee de zonnebaan bij zonsopkomst de horizon snijdt, als functie van de geografische breedte en de zonsdeclinatie.



Antwoord op de puzzelvraag

In het volgende nummer verscheen als antwoord een verrassend eenvoudige formule, namelijk: $\cos(\alpha) = \sin(\varphi)/\cos(\delta)$ waarbij α de hoek is tussen de zonnebaan en de horizon bij zonsopkomst, δ de zonsdeclinatie op een bepaalde datum en φ de geografische breedte. Omdat de uitleg niet voor iedereen even duidelijk was, volgt hieronder een toelichting met bijbehorende illustratie.

Voor deze analyse kies ik Leerboek der Boldriehoeksmeting, Volume 1 van J.J. van Laar (1892), gratis beschikbaar op Google Books. (<https://books.google.nl/books?id=7C9nAAAAcAAJ>) In figuur 54 (blz. 83) is een belangrijke boldriehoek gearceerd, met hoekpunten P , N en S : respectievelijk de astronomische pool, de noordelijke richting op de horizon en het punt waar de zon opkomt.



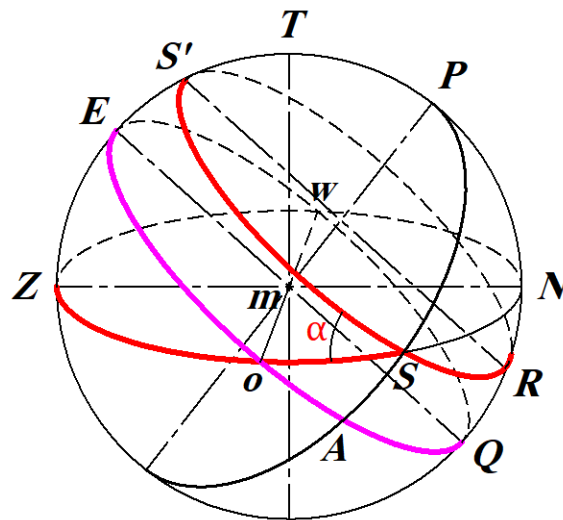
Figuur 54 Hemelboldrieboek bij van Laar

De figuren hierna zijn voor deze bijdrage opnieuw getekend, waarbij de relevante driehoeken gekleurd zijn om de structuur beter inzichtelijk te maken.

Hoe kom je aan het antwoord

Zoals vaak in de wiskunde geldt: zodra je het antwoord kent, lijkt de uitwerking vanzelfsprekend. De grote uitdaging is echter om eerst tot dat antwoord te komen. Daarom opent deze bijdrage met een systematische zoektocht en een verkenning van het beschikbare wiskundige gereedschap.

Op Figuur 1 is punt T het zenit en punt P de astronomische pool. Punt S is het punt waar de zon opkomt terwijl in punt S' de zon hoog aan de hemel staat. Deze punten definiëren de zonnebaan 's morgens.



Figuur 1: Hemelbol met horizon, equator en zonnebaan (α is de gevraagde hoek)

Op de horizon liggen de punten Z , w , N en o , respectievelijk voor Zuid, West, Noord en Oost. De equator is de cirkel door de punten E en Q en snijdt de horizon in de punten o en w . De cirkel door de astronomische polen en punt S snijdt de equator in punt A . De meridiaan is de cirkel $ZES'TPNRQ$.

De zonsdeclinatie δ is de boog tussen de equator en de zonnebaan. In de figuren weergegeven als boog ES' maar ook de boog AS of de boog QR . De boog PS is het complement daarvan, de poolshoogte. De breedtegraad φ is de hoek tussen de horizon en de astronomische pool. In de figuren is dat boog PN , maar ook de boog ET . In de figuren is de gevraagde hoek α bij zonsopkomst de hoek tussen de horizon en de zonnebaan ($\angle ZSS'$).

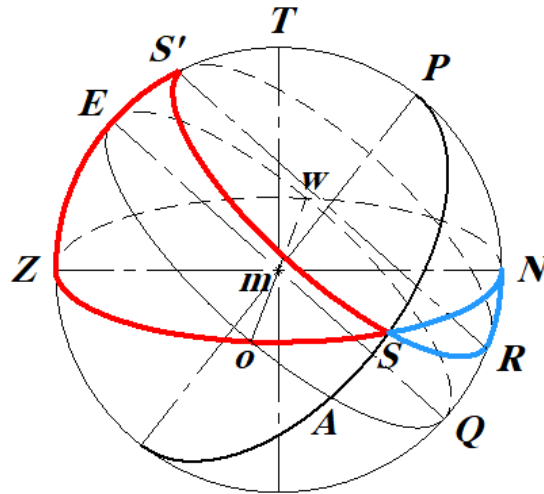
Grootcirkels

De boldriehoeksmmeetkunde geeft ons formules voor boldriehoeken, dat wil zeggen driehoeken die worden begrensd door drie grootcirkels. Een grootcirkel is een cirkel waarvan het middelpunt samenvalt met het middelpunt van de bol. Deze formules zijn niet toepasbaar op driehoeken waarvan een van de zijden géén grootcirkel is.

Zie nu Figuur 2.

De cirkel door de punten S en S' heeft weliswaar een middelpunt op de poolas, de lijn door de punten P en m , maar dit middelpunt valt niet samen met m , het midden van de bol. Bij een positieve zonsdeclinatie ligt het erboven, bij een negatieve eronder. De cirkel door de punten S en S' is dus

geen grootcirkel, en daarom is driehoek $SS'Z$ geen boldriehoek. De conclusie is dat we de formules van de boldriehoeksmmeetkunde niet mogen toepassen op deze driehoek.



Figuur 2: Boldriehoek $SS'Z$ (zijden horizon, zonnebaan en meridiaan richting Zuiden) en boldriehoek SNR (zijden horizon, zonnebaan en meridiaan richting Noorden)

Tegenover driehoek $SS'Z$ ligt driehoek SNR waarbij boog NR het verschil is tussen boog PQ (90°) en de geografische breedte φ (boog PN) en de zonsdeclinatie δ (boog QR).

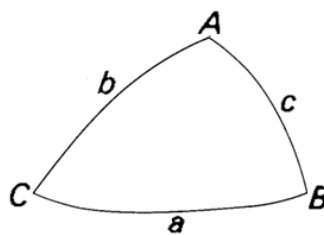
Ook deze driehoek SNR is geen boldriehoek want cirkel $SS'R$ is geen grootcirkel.

Op zoek naar boldriehoeken

We gaan op zoek naar bruikbare boldriehoeken. Met zoveel punten op de bol zijn er talloze mogelijkheden. Om onze zoektocht te beperken, verkennen we eerst het beschikbare wiskundige gereedschap. We zoeken een driehoek waarvan alle zijden grootcirkelbogen zijn en die op een of andere manier verband houdt met de zonsdeclinatie en de geografische breedte.

Formules boldriehoek

Hieronder is een afbeelding van een boldriehoek met hoekpunten A , B en C en met bogen a , b en c (Figuur 3)



Figuur 3: boldriehoek met hoekpunten en zijden

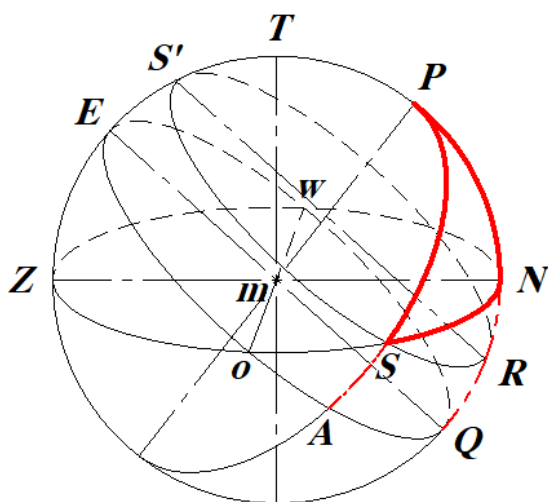
Voor deze boldriehoek gelden twee basisformules, waaruit alle andere formules kunnen worden afgeleid. Een uitgebreide uitleg over deze formules is te vinden in de cursus Boldriehoeksmmeetkunde van de Zonnewijzerkring.

- $\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A$
- $\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$

In deze formules is straks hoek A de gezochte hoek α .

De sinusformule geeft aan dat we de onbekende hoek A kunnen berekenen als we de lengtes van de bogen a en b kennen, evenals de grootte van hoek B of als we de lengtes kennen van de bogen a en c en de grootte van hoek C . Omdat we echter maar twee hoeken kennen, kunnen we deze formule alleen gebruiken als hoek B of hoek C een rechte hoek is. Preciezer gezegd, we zoeken een driehoek met een rechte hoek tegenover een bekende zijde en de gevraagde hoek tegenover een andere bekende zijde. Conclusie is dat we op zoek moeten gaan naar een **boldriehoek** met of een boog van 90° of een rechte hoek tussen de bogen.

We gaan de hoek bij zonsopkomst uitdrukken in geografische breedte en zonsdeclinatie. De zonsdeclinatie wordt weergegeven door boog AS , terwijl het complement daarvan boog SP is, de poolhoogte. De geografische breedte komt overeen met boog NP en boog PT is het complement daarvan (Figuur 4). Daarnaast is boog ST (Figuur 5) een kwart boog. In deze configuratie komen verschillende rechte hoeken voor. Zo staat de meridiaanboog NP loodrecht op horizon NS , evenals boog ST dat doet. Bovendien is boog ST een kwart cirkel. In de figuren zijn de bijbehorende boldriehoeken dik gekleurd.



Figuur 5: Boldriehoek PST met punten Pool (P), Zonsopkomst (S) en Zenit (T)

Driehoek *NPS*

Dus $\angle ZSP = 180^\circ - \angle NSP$ of $\angle ZSP = 90^\circ + \angle ZSS'$ en dus $\angle ZSS' = 90^\circ - \angle NSP$.

Driehoek PST

In driehoek PST staat boog ST loodrecht op de horizon. Dat maakt dat $\angle ZSP = 90^\circ + \angle PST$. Aangezien we net vastgesteld hebben dat $\angle ZSP = 90^\circ + \angle ZSS'$ kunnen we concluderen dat $\angle ZSS' = \angle PST$.

Anders uitgelegd:

$\angle PSR = 90^\circ$, dus $\angle NSR$ is het complement van $\angle PSN$.

$\angle NSR = \angle ZSS'$ (overstaande hoeken).

$\angle TSN = 90^\circ$, dus $\angle PST$ is het complement van $\angle PSN$.

Dus: $\angle NSR = \angle PST = \angle ZSS' = \alpha$, de gevraagde hoek.

Kortom, we hebben twee boldriehoeken gevonden die ons beide de gevraagde hoek van de zon bij zonsopkomst kunnen vertellen.

Sinusregel

De sinusregel luidt $\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b}$ en zegt ons dat in een driehoek met een bekende hoek tegenover een bekende zijde we de gevraagde hoek kunnen vinden tegenover die andere bekende zijde.

Dat is het geval in boldriehoek NPS .

De poolhoogte PS staat tegenover de rechte hoek in N en de geografische breedte $\varphi = NP$ staat tegenover $\angle NSP$.

Invullen geeft $\frac{\sin \angle NSP}{\sin NP} = \frac{\sin 90^\circ}{\sin PS}$

Tot slot passen we de herleidingsregels uit de goniometrie toe: $\sin(90^\circ - \vartheta) = \cos \vartheta$.

Nu is $\sin 90^\circ = 1$ en $\sin \angle NSP = \sin(90^\circ - \angle ZSS') = \cos \angle ZSS'$.

Van de poolhoogte PS schakelen we om naar het complement, de zonsdeclinatie AS :

$\sin PS = \sin(90^\circ - AS) = \cos AS = \cos \delta$.

Kruislingsvermenigvuldigen en invullen geeft de gezochte formule: $\cos \angle ZSS' = \frac{\sin \varphi}{\cos \delta}$.

Cosinusregel

De cosinusregel luidt $\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A$.

Die gaan we gebruiken bij driehoek PST .

Invullen geeft $\cos PT = \cos ST \cdot \cos PS + \sin ST \cdot \sin PS \cdot \cos \angle PST$.

Omdat boog ST een kwart boog is (90°), geldt $\cos ST = 0$ en $\sin ST = 1$, zodat we krijgen $\cos PT = \sin PS \cdot \cos \angle PST$.

Boog PT is het complement van de breedtegraad PN en dus is $\cos PT = \sin PN = \sin \varphi$.

Omdat $\angle ZSS' = \angle PST$ en $\sin PS = \sin(90^\circ - \delta) = \cos \delta$, is daarom $\sin \varphi = \cos \delta \cdot \cos \angle ZSS'$.

Kruislingsvermenigvuldigen geeft de gezochte formule: $\cos \angle ZSS' = \frac{\sin \varphi}{\cos \delta}$.

Samenvatting

Eerst hebben we op een bol alle bekende punten geplaatst. Daarna hebben we goed gekeken naar de opbouw van de boldriehoeksformules. We ontdekten dat we moesten zoeken naar een boldriehoek met ofwel een rechte hoek danwel een kwart boog. Toen we de juiste driehoeken gevonden hadden hebben we alles ingevuld. Vervolgens moesten we nog wat goniometrische betrekkingen herleiden. Zodoende zijn we uitgekomen op wat René Vinck ons aanreikte: de compacte formule voor de hoek bij zonsopkomst: $\cos \alpha = \frac{\sin \varphi}{\cos \delta}$.

Basis-wiskunde

In een eerste versie van dit artikel was gekozen voor de sinusregel. Voor de leden die vertrouwd zijn met het onvoltroffen boekje “Basis-wiskunde voor de Zonnewijzer” dat geschreven is door H.W. van der Wyck is daarom in deze versie de variant met de cosinusregel aan toegevoegd. In zijn boekje worden in paragraaf 3 de vijf formules van de boldriehoek behandeld en figuur 2 toont dezelfde pooldriehoek PST , maar dan gespiegeld. Bij ons staat van links naar rechts op de meridiaan de punten Zuid, Zenit, Pool en Noord, bij van der Wyck is dat precies andersom.

Henk Hietbrink / Jan ten Böhmer